ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2023

Определение

Пусть X и X' — независимые и одинаково распределённые случайные величины. Тогда *симметризацией* X называется случайная величина $X^s = X - X'$.

Очевидно, для произвольной случайной величины X её симметризация X^s имеет симметричное распределение.

Неравенства симметризации

Лемма 2.9

Для всех $x > 0$ *имеет место неравенство*

$$\mathsf{P}(X^s \geqslant x) \geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(X - \mathrm{med}(X) \geqslant x), \tag{2.33}$$

где $\mathrm{med}(X)$ *— медиана случайной величины* X*.*

Доказательство

Рассмотрим случайные величины $Y = X - \operatorname{med}(X)$ и $Y' = X' - \operatorname{med}(X')$.
Так как X и X' независимы и одинаково распределены, то $\operatorname{med}(X) = \operatorname{med}(X')$ и случайные величины Y и Y' также независимы и одинаково распределены. Заметим, что

$$\mathsf{P}(Y \geqslant 0) = \mathsf{P}(X \geqslant \operatorname{med}(X)) \geqslant \frac{1}{2}, \quad \mathsf{P}(Y \leqslant 0) = \mathsf{P}(X \leqslant \operatorname{med}(X)) \geqslant \frac{1}{2},$$

и, следовательно, $\operatorname{med}(Y) = \operatorname{med}(Y') = 0$.

Доказательство

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X^s \geqslant x) &= \mathsf{P}(X - X' \geqslant x) = \\
&= \mathsf{P}((X - \mathrm{med}(X)) - (X' - \mathrm{med}(X')) \geqslant x) = \\
&= \mathsf{P}(Y - Y' \geqslant x) \geqslant \mathsf{P}(Y \geqslant x, Y' \leqslant 0) = \\
&= \mathsf{P}(Y' \leqslant 0)\mathsf{P}(Y \geqslant x) \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(X - \mathrm{med}(X) \geqslant x).
\end{aligned}$$

□

Теорема 2.12 (слабое неравенство симметризации)

Для всех $x > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}\mathsf{P}(|X - \mathrm{med}(X)| \geqslant x) \leqslant \mathsf{P}(|X^s| \geqslant x) \leqslant 2\mathsf{P}(|X - a| \geqslant x/2). \qquad (2.34)$$

Неравенства симметризации

Доказательство

Поскольку $(-X)^s \overset{d}{=} -X^s$ и $\mathrm{med}(-X) = -\mathrm{med}(X)$, то из (2.33) получаем:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(|X^s| \geqslant x) &= \mathsf{P}(X^s \geqslant x) + \mathsf{P}(-X^s \geqslant x) \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(X - \mathrm{med}(X) \geqslant x) + \frac{1}{2}\mathsf{P}(-X - \mathrm{med}(-X) \geqslant x) = \\
&= \frac{1}{2}\mathsf{P}(|X - \mathrm{med}(X)| \geqslant x).
\end{aligned}
$$

Неравенства симметризации

Доказательство

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(|X^s| \geqslant x) &= \mathsf{P}(|X - X'| \geqslant x) \leqslant \mathsf{P}(|X - a| + |X' - a| \geqslant x) \leqslant \\
&\leqslant \mathsf{P}(|X - a| \geqslant x/2) + \mathsf{P}(|X' - a| \geqslant x/2) = \\
&= 2\mathsf{P}(|X - a| \geqslant x/2).
\end{aligned}$$

□

Всюду далее в этом параграфе $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых случайных величин.

Теорема 2.13 (сильное неравенство симметризации)

Для всех $x > 0$ *и* $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}|S_k - \mathrm{med}(S_k)| \geqslant x) \leqslant 4\mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}|S_k^s| \geqslant x). \tag{2.35}$$

Доказательство

Вместе с последовательностью $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ рассмотрим не зависящую от неё последовательность независимых случайных величин $\{X'_n\}_{n\geqslant 1}$ таких, что $X'_n \overset{d}{=} X_n$, $n \geqslant 1$. Обозначим

$$S_k = X_1 + \ldots + X_k, \quad S'_k = X'_1 + \ldots + X'_k, \quad S^s_k = S_k - S'_k,$$

$$A = \{\sup_{k\geqslant n} S^s_k \geqslant x\}, \quad \tau = \min\{k \geqslant n : S_k - \mathrm{med}(S_k) \geqslant x\}.$$

Нетрудно видеть, что $\tau \geqslant n$ и

$$\{\tau < \infty\} = \{\exists k \geqslant n : S_k - \mathrm{med}(S_k) \geqslant x\} = \{\sup_{k\geqslant n}(S_k - \mathrm{med}(S_k)) \geqslant x\}.$$

Доказательство

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A) &= \sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(\tau = k)\mathsf{P}(A \mid \tau = k) \geqslant \min_{k \geqslant n} \mathsf{P}(A \mid \tau = k) \sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(\tau = k) = \\
&= \mathsf{P}(\tau < \infty) \min_{k \geqslant n} \mathsf{P}(A \mid \tau = k) = \\
&= \mathsf{P}(\sup_{k \geqslant n}(S_k - \operatorname{med}(S_k)) \geqslant x) \min_{k \geqslant n} \mathsf{P}(A \mid \tau = k).
\end{aligned}$$

Неравенства симметризации

Доказательство

Докажем, что $\min\limits_{k\geqslant n} \mathsf{P}(A \mid \tau = k) \geqslant 1/2$. Для всех $k \geqslant n$ имеем

$$\begin{aligned}
& \mathsf{P}(A \mid \tau = k) = \mathsf{P}(\sup_{j\geqslant n} S_j^s \geqslant x \mid \tau = k) \geqslant \\
\geqslant \;& \mathsf{P}(S_k^s \geqslant x \mid \tau = k) = \mathsf{P}(S_k - S_k' \geqslant x \mid \tau = k) = \\
= \;& \mathsf{P}((S_k - \mathrm{med}(S_k)) - (S_k' - \mathrm{med}(S_k)) \geqslant x \mid \tau = k) \geqslant \\
\geqslant \;& \mathsf{P}(S_k - \mathrm{med}(S_k) \geqslant x, S_k' - \mathrm{med}(S_k) \leqslant 0 \mid \tau = k). \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Доказательство

Так как

$$\begin{aligned} &\{\tau = k\} = \\ = \;& \{S_n - \mathrm{med}(S_n) < x, \ldots, S_{k-1} - \mathrm{med}(S_{k-1}) < x, S_k - \mathrm{med}(S_k) \geqslant x\} \\ \subseteq \;& \{S_k - \mathrm{med}(S_k) \geqslant x\}, \end{aligned}$$

то

$$\mathsf{P}(S_k - \mathrm{med}(S_k) \geqslant x \mid \tau = k) = 1.$$

Доказательство

Далее, события $\{S'_k - \operatorname{med}(S_k) \leqslant 0\} = \{S'_k - \operatorname{med}(S'_k) \leqslant 0\}$ и $\{\tau = k\}$ независимы. Следовательно, из (2.36) получаем:

$$\mathsf{P}(S_k - \operatorname{med}(S_k) \geqslant x, S'_k - \operatorname{med}(S_k) \leqslant 0 \mid \tau = k) =$$
$$= \mathsf{P}(S'_k - \operatorname{med}(S_k) \leqslant 0)\mathsf{P}(S_k - \operatorname{med}(S_k) \geqslant x \mid \tau = k) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\mathsf{P}(\sup_{k \geqslant n}(S_k - \operatorname{med}(S_k)) \geqslant x) \leqslant 2\mathsf{P}(\sup_{k \geqslant n} S_k^s \geqslant x).$$

Доказательство

Применяя это неравенство к случайным величинам $-X_j$, получаем:

$$\mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}(-(S_k-\mathrm{med}(S_k)))\geqslant x)\leqslant 2\mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}(-S_k^s)\geqslant x),$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}|S_k-\mathrm{med}(S_k)|\geqslant x) &\leqslant \mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}(S_k-\mathrm{med}(S_k))\geqslant x)+\\ &+ \mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}(-(S_k-\mathrm{med}(S_k)))\geqslant x)\leqslant\\ &\leqslant 2(\mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}S_k^s\geqslant x)+\mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}(-S_k^s)\geqslant x))\leqslant\\ &\leqslant 4\mathsf{P}(\sup_{k\geqslant n}|S_k^s|\geqslant x).\end{aligned}$$

$\square$

Неравенства симметризации

Лемма 2.10

Для всех $x > 0$

$$\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k| \geqslant x) \leqslant \mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant x/2). \tag{2.37}$$

Доказательство

Так как $X_k = S_k - S_{k-1}$ для всех $k \leqslant n$, то

$$|X_k| \leqslant |S_k| + |S_{k-1}| \leqslant 2 \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|,$$

и, следовательно, $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k| \leqslant 2 \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|$. □

Неравенства симметризации

Теорема 2.14 (неравенство Леви — Рогозина)

Для всех $x > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k - \mathrm{med}(X_k)| \geqslant x\Big) \leqslant 16\mathsf{P}(|S_n - a| \geqslant x/4). \tag{2.38}$$

Неравенства симметризации

Доказательство

Применяя последовательно неравенства (2.37), (2.26) и (2.34), получаем:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^s|\geqslant x) &\leqslant \mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k^s|\geqslant x/2)\leqslant 2\mathsf{P}(|S_n^s|\geqslant x/2)\leqslant \\ &\leqslant 4\mathsf{P}(|S_n-a|\geqslant x/4).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства (2.38) осталось показать, что

$$\mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j^s|\geqslant x)\geqslant \frac{1}{4}\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k-\mathrm{med}(X_k)|\geqslant x). \tag{2.39}$$

Доказательство

Положим

$$\tau = \min\{k \geqslant 1 : X_k - \mathrm{med}(X_k) \geqslant x\}.$$

Тогда $\{\tau \leqslant n\} = \{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k - \mathrm{med}(X_k)) \geqslant x\}$ и

$$\mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j^s \geqslant x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j^s \geqslant x \mid \tau = k)\mathsf{P}(\tau = k). \qquad (2.40)$$

Доказательство

Оценим условную вероятность в правой части (2.40):

$$\mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j^s \geqslant x \mid \tau = k) \geqslant \mathsf{P}(X_k^s \geqslant x \mid \tau = k) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathsf{P}((X_k - \mathrm{med}(X_k)) - (X_k' - \mathrm{med}(X_k')) \geqslant x \mid \tau = k) \geqslant \\
&\geqslant \mathsf{P}(X_k - \mathrm{med}(X_k) \geqslant x, X_k' - \mathrm{med}(X_k') \leqslant 0 \mid \tau = k) = \\
&= \mathsf{P}(X_k' - \mathrm{med}(X_k') \leqslant 0)\mathsf{P}(X_k - \mathrm{med}(X_k) \geqslant x \mid \tau = k).
\end{aligned}$$

Неравенства симметризации

Доказательство

Поскольку

$$\mathsf{P}(X_k' - \mathrm{med}(X_k') \leqslant 0) \geqslant 1/2$$

и

$$\mathsf{P}(X_k - \mathrm{med}(X_k) \geqslant x \mid \tau = k) = 1,$$

то

$$\mathsf{P}(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j^s \geqslant x \mid \tau = k) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Отсюда и из (2.40) получаем:

$$\mathsf{P}(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j^s \geqslant x) \geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(\tau \leqslant n) = \frac{1}{2}\mathsf{P}(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} (X_k - \mathrm{med}(X_k)) \geqslant x).$$

Доказательство

Применяя последнее неравенство к случайным величинам $-X_j$, получим:

$$\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k-\mathrm{med}(X_k)|\geqslant x)\leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k-\mathrm{med}(X_k))\geqslant x)+\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}(-(X_k-\mathrm{med}(X_k)))\geqslant x)\leqslant$$

$$\leqslant 2(\mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n}X_j^s\geqslant x)+\mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n}(-X_j^s)\geqslant x))\leqslant 4\mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j^s|\geqslant x).$$

Таким образом, мы доказали неравенство (2.39), а вместе с ним и (2.38). □

Следствие 2.15

Пусть для некоторых $x > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}(|S_n - a| \geqslant x/4) \leqslant 1/32.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k - \mathrm{med}(X_k)| \geqslant x) \leqslant 32\mathsf{P}(|S_n - a| \geqslant x/4). \tag{2.41}$$

Неравенства симметризации

Доказательство

Обозначим

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k - \mathrm{med}(X_k)| \geqslant x), \quad q_n = \mathsf{P}(|S_n - a| \geqslant x/4).$$

Тогда неравенство (2.41) равносильно неравенству $p_n \leqslant 32 q_n$.

Неравенства симметризации

Доказательство

Из неравенства (2.38) получаем:

$$
\begin{aligned}
1 - 16q_n &\leqslant \mathsf{P}\big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k - \mathrm{med}(X_k)| < x\big) = \\
&= \mathsf{P}(|X_1 - \mathrm{med}(X_1)| < x, \ldots, |X_n - \mathrm{med}(X_n)| < x) = \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k - \mathrm{med}(X_k)| < x) = \\
&= \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathsf{P}(|X_k - \mathrm{med}(X_k)| \geqslant x)) \leqslant \\
&\leqslant \exp\Big\{ -\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k - \mathrm{med}(X_k)| \geqslant x)\Big\} = e^{-p_n}.
\end{aligned}
$$

Доказательство

Следовательно,

$$e^{p_n} \leqslant \frac{1}{1-16q_n} = 1 + \frac{16q_n}{1-16q_n} \leqslant 1 + 32q_n \leqslant e^{32q_n}.$$

$\square$

Следствие 2.16

Пусть $\mathsf{P}(|X_j| \leqslant y) = 1$ *для некоторого* $y > 0$. *Пусть также*

$$\mathsf{P}(|S_n - a| \geqslant x) \leqslant 1/8$$

для некоторых $x > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathsf{D} X_j \leqslant 4(x+y)^2.$$

Доказательство

Рассмотрим симметризованные случайные величины $X_n^s = X_n - X_n'$, где последовательность независимых случайных величин $\{X_n'\}_{n\geqslant 1}$ не зависит от последовательности $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ и $X_n' \overset{d}{=} X_n$.

Обозначим $S_k^s = X_1^s + \ldots + X_k^s$.

Тогда $\mathsf{E}X_j^s = 0$, $\mathsf{D}X_j^s = 2\mathsf{D}X_j$ и $|X_j^s| = |X_j - X_j'| \leqslant |X_j| + |X_j'| \leqslant 2y$.

Неравенства симметризации

Доказательство

Теперь, применяя последовательно неравенства (2.31), (2.26) и (2.34), получаем:

$$1 - \frac{(2y+2x)^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{D} X_j^s} \leqslant \mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k^s| \geqslant 2x) \leqslant 2\mathsf{P}(|S_n^s| \geqslant 2x) \leqslant$$

$$\leqslant 4\mathsf{P}(|S_n - a| \geqslant x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{4(x+y)^2}{2\sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{D} X_j} \geqslant \frac{1}{2},$$

откуда и следует требуемое неравенство. □